TENZORI VIŠEG REDA

Generalizacijom navedenih zakona transformacija mogu se uvesti tenzori višeg reda

$$\bar{A}^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_n} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial \bar{x}^{i_2}}{\partial x^{k_2}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_m}}{\partial x^{k_m}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \frac{\partial x^{l_2}}{\partial \bar{x}^{j_2}} \cdots \frac{\partial x^{l_n}}{\partial \bar{x}^{j_n}} A^{k_1 k_2 \dots k_m}_{l_1 l_2 \dots l_n}$$

To je npr. tenzor (m) puta kontravarijantan i (n) puta kovarijantan

SIMETRIČNI I ANTISIMETRIČNI TENZORI

Tenzor je simetričan u odnosu na dva kontravarijantna ili dva kovarijantna indeksa ako se njihovim premeštanjem komponente ne menjaju. Primer

$$A^{rst}_{pq} = A^{srt}_{pq}$$ simetričan u odnosu na r i s

Tenzor se naziva antisimetričan (skew-symmetric) u odnosu na dva kontravarijantna ili kovarijantna indeksa ukoliko se njihovim premeštanjem promeni znak komponenti

Pr $$A^{mpr}_{qs} = - A^{pmr}_{qs}$$ antisimetričan u odnosu na p i m

Ukoliko je tenzor simetričan u odnosu na bilo koja dva kontravarijantna i bilo koja dva kovarijantna indeksa kažemo da je apsolutno simetričan. Analogno apsolutno antisimetričan.

Svaki tenzor A_{ij} odnosno A^{ij} drugog reda može se predstaviti kao zbir simetričnog i antisimetričnog tenzora

$$A^{ij} = \frac{1}{2}\left(A^{ij} + A^{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(A^{ij} - A^{ji}\right)$$

odn. $$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(A_{ij} + A_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(A_{ij} - A_{ji}\right)$$

simetrični deo se nekad obeležava: $A^{(ij)} = \frac{1}{2}\left(A^{ij} + A^{ji}\right)$ T. Anđelić

dok asim. deo $A^{[ij]} = \frac{1}{2}\left(A^{ij} - A^{ji}\right)$

---

napomena

Simetrija tipa $A^{j}_{i} = A^{i}_{j}$ u opštem slučaju se ne održava pri transf. $\bar{A}^{j}_{i} \neq \bar{A}^{i}_{j}$ tako da nije interesantna T. A. 52

Osobina simetrije (antisimetrije) tenzora pri transformaciji koordinata ostaje očuvana.

Pr. Ako je $A^{ij} = A^{ji}$ pri transformaciji $\bar{A}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{m}} \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{n}} A^{mn}$ tj

$$\bar{A}^{ji} = \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{m}} \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{n}} A^{mn} \underset{m \leftrightarrow n}{=} \frac{\partial \bar{x}^{j}}{\partial x^{n}} \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{m}} \underbrace{A^{nm}}_{A^{mn}} = \bar{A}^{ij}$$

Neka je $\vartheta_{ij} = -\vartheta_{ji}$

$$\bar{\vartheta}_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} \vartheta_{mn} \quad \text{odn.} \quad \bar{\vartheta}_{ji} = \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i} \vartheta_{mn}$$

Posle zamene $m \Leftrightarrow n$ u poslednjoj j-ni imamo

$$\bar{\vartheta}_{ji} = \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} \underbrace{\vartheta_{nm}}_{= -\vartheta_{mn}} = -\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} \vartheta_{mn} = -\bar{\vartheta}_{ij}$$

Ovi dokazi lako se uopštavaju na tenzore viših redova.

Ali ako je $\quad A^i_j = A^j_i$

$$\bar{A}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^j} A^m_n$$

$$\bar{A}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i} A^m_n \underset{m \leftrightarrow n}{=} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} \underbrace{A^n_m}_{= A^m_n} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^n} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} A^m_n \neq \bar{A}^j_i$$

Generalizacija Shautenovog razlaganja: $P_{i_1 i_2 \cdots i_N}$

Simetrični deo:

$$P_{(i_1 i_2 \cdots i_N)} = \frac{1}{N!} \left(P_{i_1 i_2 \cdots i_N} + P_{i_2 i_1 \cdots i_N} + \cdots + P_{i_N i_1 \cdots i_{N-1}} \right)$$

Antisimetrični deo formira se na sličan način s tim što znaci ispred sabiraka treba da se uzimaju tako da $\begin{cases} + \text{ paran broj permutacija} \\ - \text{ neparan broj permutacija} \end{cases}$

Npr.
$$\vartheta_{[ijk]} = \frac{1}{3!} \left(\vartheta_{ijk} - \vartheta_{ikj} + \vartheta_{kij} - \vartheta_{kji} + \vartheta_{jki} - \vartheta_{jik} \right)$$

Neka je T^{ab}_{ijklms} proizvoljni tenzor. Fiksirajmo koliko njegovih indeksa (istovremeno gornjih ili donjih) u odnosu na koje želimo da postignemo simetričnost. Neka su to npr. j, l, m

Obrazujmo:
$$U^{ab}_{ijklms} = T^{ab}_{i(jk l m)s} = \frac{1}{3!} \left(T^{ab}_{ijklms} + T^{ab}_{ilkmjs} + T^{ab}_{imkjls} + T^{ab}_{ilkjms} + T^{ab}_{ijkmls} + T^{ab}_{imklj s} \right.$$

Tenzor U je sada simetričan po svim indeksima j, m i l.

Кованцов et al. Дифер. геом. ... str. 126 ; Победря стр. 25.

Кованцов et al. ст. <u>130</u>. P/1

Tenzor $T_{11}^{1} = \sin x^1 + \cos x^2, \quad T_{12}^{1} = x^1; \quad T_{21}^{1} = (x^1)^2, \quad T_{22}^{1} = x^1 x^2$

$T_{11}^{2} = \sin x^1 - \cos x^2, \quad T_{12}^{2} = x^2; \quad T_{21}^{2} = (x^2)^2, \quad T_{22}^{2} = \dfrac{x^1}{x^2}$

Simetrizovati po donjim indeksima.

$T_{(11)}^{1} = T_{11}^{1} = \sin x^1 + \cos x^2; \quad T_{(12)}^{1} = \frac{1}{2}\left(T_{12}^{1} + T_{21}^{1}\right) = \frac{1}{2}\left[x^1 + (x^1)^2\right],$

$T_{(22)}^{1} = T_{22}^{1} = x^1 x^2, \quad T_{(22)}^{2} = T_{22}^{2} = \dfrac{x^1}{x^2}$

$T_{(11)}^{(2)} = T_{11}^{2} = \sin x^1 - \cos x^2; \quad T_{(12)}^{2} = \frac{1}{2}\left(T_{12}^{2} + T_{21}^{2}\right) = \frac{1}{2}\left[x^2 + (x^2)^2\right]$

Tenzor analysis M-2460 p.66

TENZORSKA ALGEBRA

OPERACIJE SA TENZORIMA

Suma (ili razlika) dva tenzora koji imaju isti broj kovarijantnih i isti broj kontravarijantnih indeksa je takođe tenzor istog tipa i ranga kao dati tenzori

Pr. $C^{mp}_q = A^{mp}_q + B^{mp}_q$ $\left[\text{generalno: } A^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_r} + B^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_r} = W^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_r} \right]$

Sabiranje je komutativna i asocijativna operacija

Množenje skalarom vrši se tako što svaka odgovarajuća komponenta pomnoži tim skalarom. Naravno množenjem skalara i tenzora dobija se tenzor istog tipa $C^i_{jk} = \lambda A^i_{jk}$

Spoljašnji proizvod tenzora Proizvod dva tenzora je tenzor čiji rang je suma rangova datih tenzora.

Pr. $A^{pr}_q B^m_s = C^{prm}_{qs}$.

Ili uopšteno:

$$A^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} B^{l_1 \cdots l_s}_{k_1 \cdots k_r} = C^{j_1 \cdots j_q l_1 \cdots l_s}_{i_1 \cdots i_p k_1 \cdots k_r}$$

Napomenimo da svaki tenzor se ne može predstaviti u vidu proizvoda dvaju tenzora nižeg ranga.

Spoljašnji proizvod je distributivan u odnosu na sabiranje, so that

$$(A+B)C = AB + BC$$

ali nije komutativan $a^i b^k_j \neq b^k_j a^i$

Pojam kontrakcije Ukoliko je jedan kontravarijantni indeks jednak jednom kovarijantnom indeksu onda prema sumacionoj konvenciji imamo sumiranje po tom indeksu i kao rezultat dobijamo tenzor čiji je red (rang) za dva niži od reda početnog. Ta operacija naziva se kontrakcija tenzora (Свертывание)

Pr. $$\bar{A}^i_{jie} = \underbrace{\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^i}}\frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^e} A^\alpha_{\beta\mu\delta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^e} \underbrace{\delta^\mu_\alpha} A^\alpha_{\beta\mu\delta} = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\delta}{\partial \bar{x}^e} A^\alpha_{\beta\alpha\delta}$$

Dakle $A^i_{jie} \equiv \tilde{A}_{je}$ je kovarijantni tenzor drugog ranga

<u>Unutrašnji proizvod tenzora</u> Ukoliko izvršimo spoljašnje množenje tenzora i potom kontrakciju, dobiće se novi tenzor koji se naziva unutrašnji proizvod tenzora.

$$C^{mpr}_{qst} = A^{mp}_{q} B^{r}_{st} \quad \text{Neka je } q = r$$

$$= A^{mp}_{r} B^{r}_{st} = C^{mpr}_{rst} = \tilde{C}^{mp}_{st}$$

RELATIVNI TENZORI (T. Arndt p. 58) TENZ. ANALYSIS p. 72.

Pored navedenih tenzora postoje još veličine koje se pri transformaciji koordinata transformišu po sličnim, ali nešto opštijim zakonima. Naime ako se skup veličina transformišu prema:

$$\bar{A}^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_n} = \left|\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s}\right|^M \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial \bar{x}^{i_2}}{\partial x^{k_2}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_m}}{\partial x^{k_m}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{l_n}}{\partial \bar{x}^{j_n}} A^{k_1 \dots k_m}_{l_1 \dots l_n}$$

gde je $\left|\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s}\right|$ jacobijan transformacije starih promenl. x^i u nove promenljive $\bar{x}^i$, onda taj skup definiše tzv. relativni tenzor težine M. U slučaju $M=0$ dobijamo poznatu transformacionu formulu i te tenzore nazivamo još apsolutni tenzori ili prosto tenzori.

Vrednost M-a određuje tzv. težinu tenzora

Rekapitulacija terminologije

1. red (rang) – broj indeksa (valentnost)
2. tip – položaj indeksa i njihov raspored
3. težina tenzora određena je eksponentom jacobijana

Relativni tenzor nultog reda (relativni skalar) težine +1 naziva se $\boxed{\text{skalarna gustina}}$. Recimo:

$$\bar{A} = \left| \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^s} \right| A$$

Razlog za ovakvu terminologiju može se videti iz izraza za ukupnu masu za raspodelu mase $\rho(x^1, x^2, x^3)$, x^i – pravougle koordinate

$$M = \iiint_V \rho(x^1, x^2, x^3)\, dx^1\, dx^2 dx^3$$

Ako promenimo koordinate: $x^i = x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$

onda je masa $M = \iiint_V \rho[x(\bar{x})] \left| \dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right| d\bar{x}^1 d\bar{x}^2 d\bar{x}^3$

$$= \iiint_V \bar{\rho}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)\, d\bar{x}^1\, d\bar{x}^2 d\bar{x}^3$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\rho} = \rho \left| \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right|$$

Alg. operacije sa rel. tenzorima

a) – Sabirati (oduzimati) se mogu samo relativni tenzori koji pored istog reda i tipa imaju iste težine.

b) – Množenjem relativnih tenzora dobija se tenzor čija je težina jednaka zbiru težina pojednih tenzora.

c) – Operacija kontrakcije ne menja težinu tenzora.

16.XI '93.

Zakon količnika

Raspoznavanje tenzorske prirode sistema vršimo posmatranjem obrazaca transformacije, međutim ta operacija je često duga i komplikovana. Zato ćemo razmotriti sledeći način. Neka je data veličina $X(i,j,k)$ koja je određena sa tri indeksa zgr koje zasad neznamo raspored. Onda obrazujmo unutrašnji proizvod ove veličine sa nekim tenzorom A, rezultat operacije neće uvek biti tenzor. Ali ako je rezultat neki već poznati tenzor B $\Rightarrow$ da $X(i,j,k)$ mora biti tenzor

<u>Dakle</u> Ako je unutrašnji proizvod neke nepoznate veličine X sa proizvoljnim tenzorom A neki poznati tenzor B, tada je nepoznata veličina takođe tenzor.

Taj kriterijum je zakon (teorema) količnika.
Ime dobijeno: jer podseća na j-nu: $XA = B$

U praksi se često za poznati tenzor B uzima neki skalar npr. $X(i,j,k)$ uzećemo tri vektora zato što ima tri indeksa u obrazovaćemo proizvod. Biraćemo prirodu vektora tako sve dotle se ne dobije skalarna invarijanta kao rezultat. Ako smo to postigli sa vektorima $u^i v_j w^k$ i dobili skalarnu invarijantu φ tj. ako je:

$$\sum_{i,j,k} X(i,j,k)\, u^i v_j w^k = \varphi$$

može da se tvrdi da je $X(i,j,k) = X^j_{ik}$

tj. da je dati sistem trećeg reda tenzor. Ta tvrdnja se može naknadno proveravati

$$X(i,j,k)\, u^i v_j w^k = \varphi$$

u novim koordinatama: $\bar{X}(p,q,r)\, \bar{u}^p \bar{v}_q \bar{w}^r = \bar{\varphi}$

Znamo: $\bar{u}^p = \dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} u^i$; $\bar{v}_q = \dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} v_j$; $\bar{w}^r = \dfrac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} w^k$; $\bar{\varphi} = \varphi$

$$\bar{X}(p,q,r) \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} u^i v_j w^k = \varphi$$

Upoređivanjem prve i poslednje j-ne $\Rightarrow$ $\bar{X}(p,q,r) \dfrac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^i} \dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^q} \dfrac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} = X(i,j,k) \;\Big/\; \dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^e} \dfrac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j} \dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n}$

$\delta^p_e \delta^m_q \delta^r_n \bar{X}(p,q,r) = \dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^e} \dfrac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^j} \dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} X(i,j,k) = \bar{X}(e,m,n)$ Dakle: X^m_{en}